Équation avec un paramètre

Énoncé

Dans cet exercice, on s'intéresse aux solutions positives de l'équation (E) : $\dfrac{x}{(2\ln x + 1)^2} = mx$, où m est un paramètre réel.

Partie A

1. (a) En utilisant un logiciel adapté, tracer la courbe (C) représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x}{(2\ln x + 1)^2}$ et la droite (d) d'équation $y = mx$.
Conjecturer alors le nombre de solutions de l'équation (E).

Appeler l'examinateur pour lui montrer le graphique et répondre à la question posée.

(b) Dans cette question, m est un entier naturel non nul. On note a_m la plus petite des solutions de l'équation (E) et b_m, la plus grande. On s'intéresse aux suites (a_m) et (b_m).
Conjecturer, à l'aide du logiciel, les variations et la convergence de ces deux suites.
Que peut-on dire de ces deux suites ?

Appeler l'examinateur pour lui exposer les conjectures faites et la démarche envisagée pour les questions à venir.

Partie B

2. (a) Calculer les expressions de a_m et b_m, en fonction de m.
(b) Justifier le sens de variation de la suite (b_m).
(c) Calculer la limite de cette suite.

Production demandée

- Visualisation à l'écran des représentations graphiques.
- Conjectures demandées.
- Réponse écrite et orale à la question 2.
